Bernoulli-Kette

Führt man ein Bernoulli-Experiment n mal durch, so spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n.

Die Trefferwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit für den „Ja“-Ausgang eines einzelnen Bernoulli-Experiments sei p.

Die Zufallsvariable X stehe nun für die Anzahl der Treffer.

Der Ausdruck

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

steht dann für die Wahrscheinlichkeit, dass man genau k Treffer in einer Reihe von n Versuchen erhält.

Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die sich aus einer Bernoulli-Kette ergibt nennt man Binomialverteilung.

Der Ausdruck

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

hängt tatsächlich nur von n und p ab.

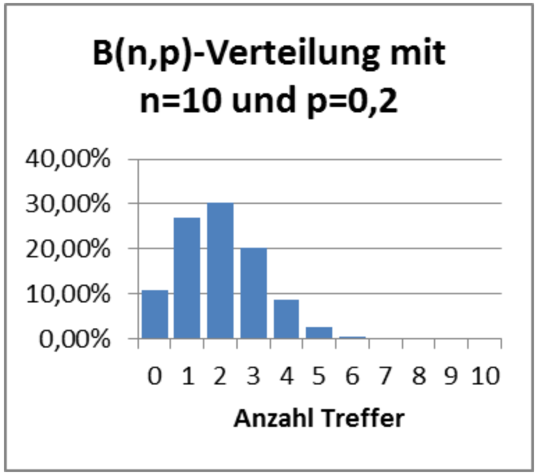
Man nennt die Zufallsvariable X daher $B_{n;p}$-verteilt.

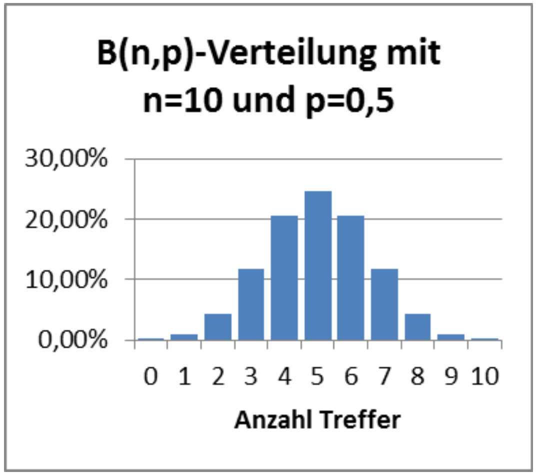
Eigenschaften der Binomialverteilung

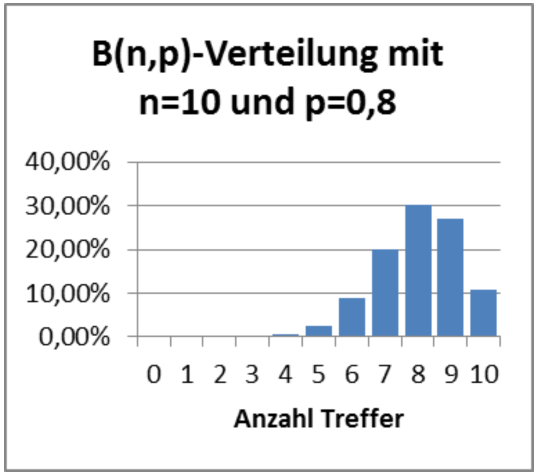
Zur besseren Veranschaulichung betrachten wir nun drei Bernoulli-Ketten der Länge 10.

Die Trefferwahrscheinlichkeit im ersten Experiment sei $p = 0{,}2$ im zweiten $p = 0{,}5$ und im dritten $p = 0{,}8$.

Wir variieren also p und betrachten die zugehörigen Histogramme:







Eigenschaften der Binomialverteilung

Man erkennt, dass bei geringen Trefferwahrscheinlichkeiten die durch die Binomialverteilung beschriebene „Welle“ eher linkslastig und bei hohen Trefferwahrscheinlichkeiten eher rechtslastig ist.

Dies sollte auch anschaulich klar sein, denn bei steigenden Trefferwahrscheinlichkeiten wird es auch immer wahrscheinlicher, mehr Treffer zu erzielen!

Variiert man die Anzahl n der Versuche, also die Länge der Bernoulli-Kette so verändert sich lediglich die Höhe der einzelnen Balken im Histogramm, d.h. mit größer werdenden Versuchszahlen werden die einzelnen Trefferwahrscheinlichkeiten immer geringer.

Binomialverteilung mit dem GTR

Bei langen Bernoulli-Ketten ist man weniger an der Wahrscheinlichkeit einzelner Treffer interessiert sondern eher daran, wie wahrscheinlich es ist, dass die Trefferanzahl sich in einem gewissen Bereich bewegt.

Eine Zufallsvariable X sei $B_{10;0,4}$-verteilt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für …

a) mindestens 5 Treffer? ⇨ $P(X \geq 5) = ?$

b) höchstens 8 Treffer? ⇨ $P(X \leq 8) = ?$

c) weniger als 7 Treffer? ⇨ $P(X < 7) = ?$

d) eine Trefferzahl zwischen 3 und 9? ⇨ $P(3 \leq X \leq 9) = ?$

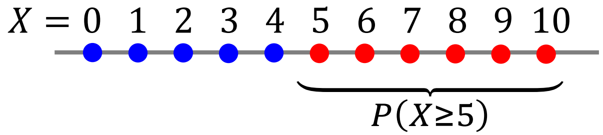
Binomialverteilung mit dem GTR

Wegen $P(X \geq 5) = P(X = 5) + \cdots + P(X = 10)$ kann es sehr aufwändig werden, solche Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen.

Mit dem GTR kann man über die Funktion `binomcdf(n,p,k)` (über `2ND DISTR`)den Ausdruck $P(X \leq k)$ berechnen. Alle anderen Ausdrücke lassen sich darauf zurückführen.

Lösung der Aufgaben:

a) Es gilt $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$



Eingabe mit dem GTR `1-binomcdf(10,0.4,4)`

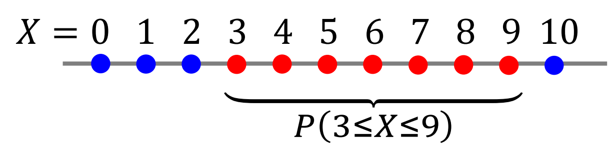
liefert 0,3669, d.h. $P(X \geq 5) \approx 36{,}69\%$.

Weitere Beispiele mit dem GTR

b) $P(X \leq 8) =$ binomcdf(10,0.4,8) $\approx 99{,}8\%$

c) $P(X < 7) = P(X \leq 6) =$ binomcdf(10,0.4,6) $\approx 94{,}5\%$

d) $P(3 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 2) =$ binomcdf(10,0.4,9) - binomcdf(10,0.4,2) $\approx 83{,}2\%$



Die Wahrscheinlichkeit z.B. von $P(X = 4)$ kann man direkt mit binompdf(10,0.4,4) bestimmen.

Es folgt: $P(X = 4) \approx 25{,}1\%$.